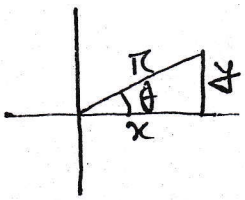
অধ্যায়: ২৩

* বিন্দু, স্থানাংক, কেন্দ্র (x,y), কার্তেসীয় (x,y) পোলার (r,θ)



$\cos\theta = \frac{x}{r}$

* $x = r\cos\theta$

$\sin\theta = \frac{y}{r}$

* $y = r\sin\theta$

* $r = \sqrt{x^2+y^2}$

* $\tan\theta = \frac{y}{x}$

$\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$

$\cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$

$\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অন্তি ভূমি}}$

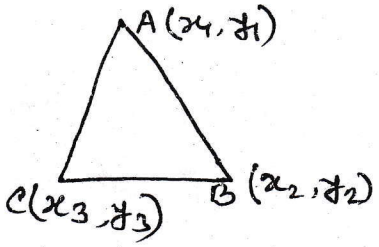
$A\bullet(x_1,y_1)$ ——— $B(x_2,y_2)$

AB এর মধ্যবর্তী দূরত্ব : $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

AB এর মধ্য বিন্দু $x = \frac{x_1+x_2}{2}$ $y = \frac{y_1+y_2}{2}$

AB যদি $m:n$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয় $x = \frac{x_2m+x_1n}{m+n}$, $y = \frac{my_2+y_1n}{m+n}$

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$



ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র

$x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$ $y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$

সমস্যা নং-৭

* $(7,z)$ ও $(-5,-10)$ বিন্দুর সংযোগ রেখাকে x-অক্ষ যে অনুপাতে বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর এবং এবং বিভক্ত বিন্দুর ভুজ নির্ণয় কর।

উঃ- x অক্ষের উপর কোন বিন্দু $(a,0)$ ——— $(7,z)$

মনে করি, $(7,z)$ ও $(-5,-10)$ বিন্দুর $m:n$ অনুপাতে বিভক্ত করে

আমরা জানি, $y = \frac{my_2+ny_1}{m+n}$

বা, $0 = \frac{m(-10)+n(z)}{m+n}$

বা, $-10m+zn = 0$

বা, $zn = 10m$

$\frac{z}{10} = \frac{m}{n}$

আবার,

$x = \frac{x_2m+x_1n}{m+n}$

$a = \frac{-5\times z+7\times 10}{z+10}$

$= \frac{-35+70}{17}$

$= \frac{35}{17}$ (উত্তর)

$\therefore$ z:10 অনুপাতে বিভক্ত করে

২. (1, 2) ও (6, x) বিন্দুর সংযোগ রেখাকে (3, 4) বিন্দুটি অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তা নির্ণয় কর।

মনে করি, $m : n$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে

$$x = \frac{x_2 m + x_1 n}{m+n}$$

বা, $3 = \frac{6 \times m + 1 n}{m+n}$

বা, $6m + n = 3m + 3n$

বা, $6m - 3m = 3n - n$

$3m = 2n$

$\frac{3}{2} = \frac{n}{m}$

$\therefore \frac{m}{n} = \frac{2}{3}$

অথবা,

$$y = \frac{y_2 m + y_1 n}{m+n}$$

$$4 = \frac{x m + 2n}{m+n}$$

$4m + 4n = x m + 2n$

$4n - 2n = x m - 4m$

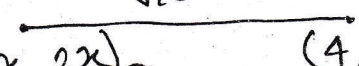
$2n = 3m$

$\frac{2}{3} = \frac{m}{n}$

$\therefore m : n = 2 : 3$

(১০) একটি বিন্দুর কোটি ভুজের দ্বিগুণ যদি তার দূরত্ব (4, 3) হতে $\sqrt{10}$ একক হয়, তবে বিন্দুটির স্থানাংক নির্ণয় কর।

মনে করি, ভুজ x
কোটি $2x$



$(x, 2x)$ ও $(4, 3)$ এর দূরত্ব $= \sqrt{(x-4)^2 + (2x-3)^2}$

শর্তমতে,

$$\sqrt{(x-4)^2 + (2x-3)^2} = \sqrt{10}$$

$x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 + (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 10$ (বর্গ করে)

$x^2 - 8x + 16 + 4x^2 - 12x + 9 - 10 = 0$

$5x^2 - 20x + 15 = 0$

$5(x^2 - 4x + 3) = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$x^2 - 3x - x + 3 = 0$

$x(x-3) - 1(x-3)$

$(x-3)(x-1) = 0$

$x - 3 = 0$ বা $x - 1 = 0$

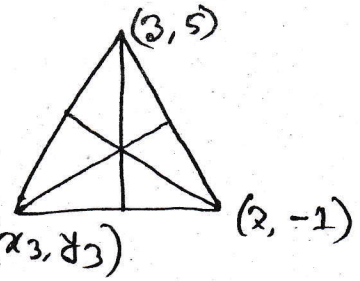
$x = 3 \quad x = 1$

নির্ণেয় (3, 6) (1, 2) (২টি) (২)

* ৩১. ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাংক (2, 2). A ও B শীর্ষবিন্দু দুটির স্থানাংক যথাক্রমে (3, 5) ও (2, -1) হলে C বিন্দুর স্থানাংক কত?

ভরকেন্দ্র $(x, y) = (2, 2)$

মনে করি C বিন্দু (x_3, y_3)



আমরা জানি,

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$2 = \frac{3 + 2 + x_3}{3}$$

$$10 + x_3 = 21$$

$$x_3 = 21 - 10$$

$$x_3 = 11$$

$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

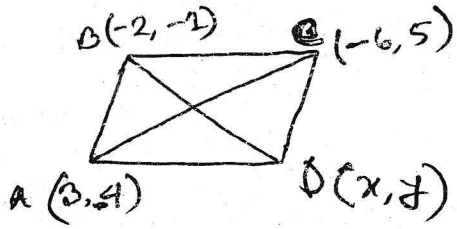
$$2 = \frac{5 - 1 + y_3}{3}$$

$$4 + y_3 = 6$$

$$y_3 = 2$$

$\therefore$ C বিন্দু $(x_3, y_3) = (11, 2)$

(৩২) কোন সামান্তরিকের একটি কর্ণের প্রান্ত বিন্দু দুটির স্থানাংক $(3, -4)$ এবং $(-6, 5)$ এবং তৃতীয় শীর্ষবিন্দু $(-2, -1)$ হলে চতুর্থ শীর্ষবিন্দু নির্ণয় কর।



মনে করি চতুর্থ শীর্ষবিন্দু (x, y)

AC এর মধ্যবিন্দু $\frac{3 + (-6)}{2}, \frac{-4 + 5}{2}$

BD এর মধ্যবিন্দু $\frac{-2 + x}{2}, \frac{-1 + y}{2}$

শর্তমতে, $\frac{-2 + x}{2} = \frac{3 - 6}{2}$

$-2 + x = -3$

$x = -3 + 2$

$= -1$

আবার, $\frac{-1 + y}{2} = \frac{-4 + 5}{2}$

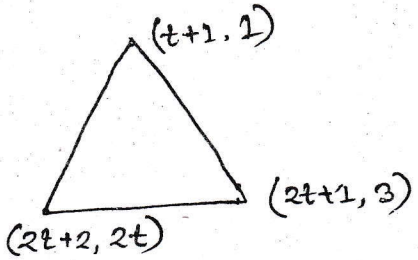
$-1 + y = 1$

$y = 1 + 1$

$y = 2$

নির্ণেয় বিন্দু $(-1, 2)$

রচনা: ৪৫: একটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর স্থানাংক $(t+1, 1)$ $(2t+1, 3)$ ও $(2t+2, 2t)$ হলে ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর এবং যে ক্ষেত্রে $t = 2$ অথবা $t = -\frac{1}{2}$ হলে. ঐ বিন্দুগুলো সমরেখ।



ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} t+1 & 1 & 1 \\ 2t+1 & 3 & 1 \\ 2t+2 & 2t & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} t+1-2t-1 & 1-3 & 0 \\ 2t+1-2t-2 & 3-2t & 0 \\ 2t+2 & 2t & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -t & -2 & 0 \\ -1 & 3-2t & 0 \\ 2t+2 & 2t & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -t & -2 \\ -1 & 3-2t \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\{-3t+2t^2-2\}$

$= \frac{1}{2}\{2t^2-3t-2\}$ (উত্তর)

যদি সমরেখ হয় ক্ষেত্রফল 0 হবে

$t = 2$ হয়

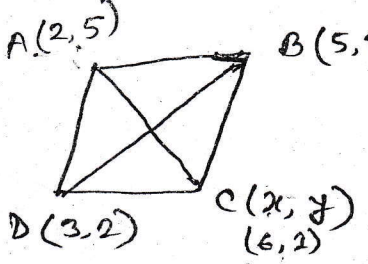
$= \frac{1}{2}\{2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 2\}$

$= \frac{1}{2}\{8-6-2\}$

$= \frac{1}{2}(0)$

$= 0$

(৫৪) যদি $A(2,5)$ $B(5,4)$ এবং $D(3,2)$ বিন্দু তিনটি ABCD রম্বসের তিনটি শীর্ষবিন্দু হয় তাহলে চতুর্থ শীর্ষবিন্দুর C এর স্থানাংক এবং এর ক্ষেত্রফল কত?



মনে করি, C বিন্দুর স্থানাংক (x, y)

AC এর মধ্যবিন্দু $\frac{2+x}{2}, \frac{5+y}{2}$

DB এর মধ্যবিন্দু $\frac{3+5}{2}, \frac{2+4}{2}$

শর্তমতে, $\frac{2+x}{2} = \frac{3+5}{2}$

$2+x = 3+5$

$x = 8-2$

$= 6$

আবার $\frac{5+y}{2} = \frac{2+4}{2}$

$5+y = 6$

$y = 6-5$

$y = 1$

AC এর দূরত্ব $= \sqrt{(2-6)^2+(5-1)^2}$

$= \sqrt{16+16}$

$= \sqrt{32}$

DB এর দূরত্ব $= \sqrt{(3-5)^2+(2-4)^2}$

$= \sqrt{4+4}$

$= \sqrt{8}$

ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ কর্ণদ্বয়ের গুণফল

$= \frac{1}{2} \times AC \times DB$

$= \frac{1}{2} \times \sqrt{32} \times \sqrt{8}$

$= 8$ বর্গ একক

ঢাল $= m = \tan\theta =$

(x_1, y_1) (x_2, y_2) বিন্দু দুটির ঢাল $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

$ax + by + c = 0$ রেখার ঢাল $m = \frac{-x \text{ এর সহগ}}{y \text{ এর সহগ}}$

(x_1, y_1) ও (x_2, y_2) দুটি বিন্দুগামী সরলরেখা হবে $\frac{x_1 - x}{x_1 - x_2} = \frac{y_1 - y}{y_1 - y_2}$

উহা অক্ষদ্বয়কে স্পর্শ করলে সরলরেখা হবে $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$ax_1 + by_1 + c = 0$ রেখার সমান্তরাল রেখা $bx_1 - ay_1 + c = 0$

(x_1, y_1) ও $ax_1 + by_1 + c = 0$ রেখার দূরত্ব $= \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

ও $ax_1 + by_1 + c = 0$ ও $ax_2 + by_2 + c =$ এর মধ্যবর্তী দূরত্ব $\frac{c_1 - c_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$ax_1 + by_1 + c = 0$ রেখার সমান্তরাল রেখা $ax_1 + by_1 + k = 0$

অন্য এস: ৪৬

উদা: ৬৬ $(2, -1)$ বিন্দু হতে $3x - 4y + 5 = 0$ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর।

$3x - 4y + 5 = 0$ রেখার লম্ব রেখা $4x + 3y + k = 0$ --- (i)

(i) নং রেখা যদি $(2, -1)$ বিন্দু দিয়ে যায় $4 \times 2 + 3 \times (-1) + k = 0$

$k = -5$

$\therefore 4x + 3y - 5 = 0$ --- (ii)

$3x - 4y + 5 = 0$ --- (iii)

(ii) নং কে 4 দ্বারা (iii) নং কে 3 দ্বারা গুণ করে পাই

$16x + 12y - 20 = 0$

$9x - 12y + 15 = 0$

$25x - 5 = 0$

$25x = 5$

$x = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

$x = \frac{1}{5}$ (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে

$4 \cdot \frac{1}{5} + 3y = 5$

$3y = 5 - \frac{4}{5}$

$3y = \frac{25 - 4}{5}$

$y = \frac{21}{5 \times 3} = \frac{7}{5}$

$\therefore \left(\frac{1}{5}, \frac{7}{5}\right)$ (উত্তর)

সংক্ষিপ্ত
আর. এস ④ একটি চলমান বিন্দুর সমীকরণ নির্ণয় কর যা y অক্ষ হতেও $(3,-2)$ বিন্দুর দূরত্ব সর্বদা সমদূরবর্তী হয়।

ধরে করি চলমান বিন্দু $P(x,y)$

y অক্ষ হতে এর দূরত্ব x

শর্তমতে, (x,y) ও $(3,-2)$ বিন্দুর দূরত্ব $= x$

$$\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2} = x$$

বা, $x^2-2.x.3+3^2+y^2+2.y.2+2^2 = x^2$

বা $-6x+3^2+y^2+4y+4 = 0$

বা, $y^2+4y+9+4-6x = 0$

বা, $y^2+4y-6x+13 = 0$

৫. একটি ঋণ বিন্দু এমনভাবে চলছে যে y অক্ষ হতে এর দূরত্ব $(2,2)$ বিন্দু হতে এর দূরত্বের দ্বিগুণ। বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

ধরে করি চলমান বিন্দু $P(x,y)$

$(2,2)$ ও (x,y) বিন্দুর দূরত্ব $\sqrt{(2-x)^2+(2-y)^2}$

শর্তমতে, $2\sqrt{(2-x)^2+(2-y)^2} = x$

~~$2\sqrt{(2-x)}$~~ বা, $2\sqrt{(2^2-2.2.x+x^2+2^2-2.2.y+y^2}=$

$4(4-4x+x^2+4-4y+y^2) = x^2$

$16-16x+4x^2+16-16y+4y^2 = x^2$

$4x^2-x^2+4y^2-16x-16y+32 = 0$

$3x^2+4y^2-16x-16y+32 = 0$

৫। $A(h,k)$ বিন্দুটি $6x-y=1$ রেখার উপর অবস্থিত এবং $B(k,h)$ বিন্দুটি $2x-5y=5$ রেখার উপর অবস্থিত। AB সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

$A(h,k)$ বিন্দুটি যদি $6x-y=1$ রেখার উপর হয় $6h-k=1$

$B(k,h)$ " " " $2x-5y=5$ " " $2k-5h=5$

$\therefore 6h-k=1 \quad ---①$

$-5h+2k=5 \quad ---②$

① নং কে 2 দ্বারা গুণ করে যোগ করি

$$\begin{array}{r} 12h-2k=2 \\ -5h+2k=5 \\ \hline 7h \quad\quad =7 \end{array}$$

$$h=\frac{7}{7}=1$$

$\therefore h=1$

h এর মান ① সমীকরণে বসিয়ে পাই $6\times1-k=1$

$-k=1-6$

$-k=-5$

$k=5$

$A(1,5)$ ও $B(5,1)$ এর সমীকরণ

$$\frac{x-1}{1-5}=\frac{y-5}{5-1}$$

$$\frac{x-1}{-4_1}=\frac{y-5}{4_1}$$

$x-1=-y+5$

$x+y=5+1$

$x+y=6$ (উত্তর)

* ৪৪. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $3x-y-13=0$ এবং $x-4y+3=0$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়ে যায় এবং রেখার উলর লম্ব।

$3x-y-13=0$ --- ①

$x-4y+3=0$ --- ②

রেখাদ্বয়ের ছেদ বিন্দু

① নং রেখাকে 4 দ্বারা গুণ করে বিয়োগ করি

$$\begin{array}{r} 12x-4y-52=0 \\ x-4y+3=0 \\ \hline 11x-55=0 \end{array}$$

$11x=55$

$x=\frac{55}{11}$

$x=5$

$2x=+6$

$x=3$

এবার ① নং সমীকরণে বসিয়ে পাই $3\times5-y-13=0$

$-y-13=y$

$y=2$

ছেদ বিন্দু $(5,2)$

$2x+5y=0$ রেখার সমান্তর রেখা $5x+2y+k=0$ --- ①

① নং রেখা যদি $(5,2)$ বিন্দু দিয়ে যায়

$5\times5+2\times2+k=0$ $5\times5-2\times2+k=0$

$25-4+k=0$

$k=-21$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ: $5x-2y+k$

$5x-2y-21=0$

বৃত্ত :

* কেন্দ্র (g, f) ও ব্যাসার্ধ r হলে বৃত্তের সমীকরণ ~~$(x-x)^2+(f$~~

$$(x-g)^2 + (y-f)^2 = r^2$$

* (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) কে ব্যাস ধরিয়া বৃত্তের সমীকরণ

$$(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$$

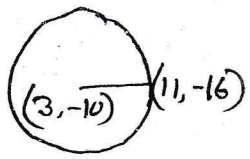
* বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

কেন্দ্র $(-g, -f)$

ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2+f^2-c}$

সূত্রঃ

উঃ: ও $(3, -10)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট সকল বৃত্ত $(11, -16)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।



মনে করি ব্যাসার্ধ r

$$r = \sqrt{(3-11)^2 + (-10+16)^2}$$

$$= \sqrt{(-8)^2 + (6)^2}$$

$$= \sqrt{64+36}$$

$$= \sqrt{100}$$

$$=$$

আমরা জানি, (g, f) কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ r হলে বৃত্তের সমীকরণ

$$(x-g)^2 + (y-f)^2 = r^2$$

$$(x-3)^2 + (y-10)^2 = (\sqrt{100})^2$$

$$(x-3)^2 + (y-10)^2 = 100$$ Ans

উদা: 6 (2, 3) কেন্দ্রবিশিষ্ট এবং x অক্ষকে স্পর্শ করে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং বৃত্তটি y অক্ষ হতে যে জেদ করে তা নির্ণয় কর।

মনে করি বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ --- (i)

যেহেতু কেন্দ্র $(g,f)=(2,3)$

$g=2,\ f=3$

x অক্ষকে স্পর্শ করে $g^2=c$

$2^2=c$

$\therefore c=4$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ: $x^2+y^2+2.2.x+2.3.y+4=0$

$x^2+y^2+4x+6y+4=0$

y অক্ষ হতে যে জ্যা ছেদ করে $=2\sqrt{f^2-c}$

$=2\sqrt{3^2-4}$

$=2\sqrt{9-4}$

$=2\sqrt{5}$

অনু-৩১ একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা কেন্দ্র (4, 5) বিন্দুতে এবং যা $x^2+y^2+4x-6y-12=0$ বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যায়

$x^2+y^2+4x-6y-12=0$ বৃত্তের কেন্দ্র $g=\frac{4}{2}=-2$

$f=\frac{-6}{2}=+3$

$\therefore (g,f)=(2,-3)$

কেন্দ্র (4, 5) বৃত্ত যদি (2, -3) বিন্দু দিয়ে যায়

ব্যাসার্ধ $r=\sqrt{(4+2)^2+(5+3)^2}$

$=\sqrt{6^2+2^2}$

$=\sqrt{40}$

নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ $(x-4)^2+(y-5)^2=(\sqrt{40})^2$

$x^2-2.x.4+4^2+y^2-2.y.5+5^2=40$

$x^2+y^2-8x-10y+41-40=0$

$x^2+y^2-8x-10y+1=0$

(ঃ অনুঃ)
* x অক্ষকে স্পর্শ করে এবং (0,2) ও (0,7) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এরূপ দুটি বৃত্তের বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর (নিজে করতে হবে)

উদাঃ ৩৩ y অক্ষকে স্পর্শ করে এবং (3,0) ও (02,0) বিন্দুদিয়ে অতিক্রম করে এরূপ দুটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। (নিজে করতে হবে)

৫১. একটি বৃত্ত (1,2) ও (3,2) বিন্দু দিয়ে যায় এবং x অক্ষকে স্পর্শ করে। এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

উঃ- ধরি, বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ --- (i)

(i) নং বৃত্ত যদি (1,2) বিন্দু দিয়ে যায়

$1^2+2^2+2\cdot g\cdot 1+2\cdot f\cdot 2+c=0$

$2g+4f+c=-5$ ---- (ii)

(i) নং বৃত্ত যদি (3,2) বিন্দুদিয়ে যায়

$3^2+2^2+2\cdot g\cdot 3+2\cdot f\cdot 2+c=0$

$6g+4f+c=-13$ ---- (iii)

(iii) − (ii) থেকে (i) বিয়োগ করে

$6g+4f+c=-13$

$2g+4f+c=-5$

$4g=-8$

$g=-\frac{8}{4}$

$g=-2$

x অক্ষকে স্পর্শ করায়

$g^2=c$

$(-2)^2=c$

$c=4$

$g=-2$ (ii)

g ও c এর মান (i) ও নং সমীকরণে বসিয়ে

$2(-2)+4f+4=-5$

$-4+4f+4=-5$

$4f=-5$

$f=-\frac{5}{4}$

নির্ণেয় সমীকরণ

$x^2+y^2+2\cdot(-2)\cdot x+2\cdot(-\frac{5}{4})y+4=0$

$x^2+y^2-4x-\frac{5}{2}y+4=0$

$\frac{2x^2+2y^2-8x-5y+8}{2}=0$

$2x^2+2y^2-8x-5y+8=0\times 2$

অনু:- ৪৭ $2x-y=3$ রেখার উপর কেন্দ্রবিশিষ্ট সকল বৃত্ত $(3,-2)$ ও $(-2,0)$ বিন্দুদিয়ে অতিক্রম করে। এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ---(i)

(i) নং বৃত্ত যদি $(3,-2)$ বিন্দু দিয়ে যায়

$3^2+(-2)^2+2\cdot g\cdot 3+2\cdot f\cdot(-2)+c=0$

$9+4+6g-4f+c=0$

$6g-4f+c=-13$ ---(ii)

(i) নং বৃত্ত যদি $(-2,0)$ বিন্দু দিয়ে যায়

$(-2)^2+0^2+2\cdot g\cdot(-2)+2\cdot f\cdot 0+c=0$

$4-4g+2f+c=0$

$-4g+2f+c=-4$ ---(iii)

বৃত্তের কেন্দ্র $(-g,-f)$ যদি $2x-y=3$ রেখার উপর হয়

$-2g+f=3$ ---(iv)

(ii) (iii) ও (iv) নং সমীকরণ সমাধান করে

$g=\frac{3}{2}$ $f=6$ $c=2$

নির্ণেয় সমীকরণ: $x^2+y^2+2\cdot\frac{3}{2}\cdot x+2\cdot 6\cdot y+2=0$

$x^2+y^2+3x+12y+2=0$

অনুশীলনী:- ৪৮, ৪৯, (করতে হবে)